

LA FISURACION DISCRETA: UNA ALTERNATIVA A LOS MODELOS DE ANALISIS NO-LINEAL DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON

MIGUEL ANGEL FERNANDEZ PRADA

y
PEDRO MIGUEL SOSA

*E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos
Dpto. de Ingeniería de la Construcción
Universidad Politécnica de Valencia
Camino de Vera s/n
46071 Valencia*

RESUMEN

En este trabajo se presenta un modelo de elementos finitos con fisuración discreta para el análisis no lineal de estructuras planas de hormigón cargadas en su plano. Mediante la utilización de cinco tipos de elementos finitos diferentes se incluyen en el análisis, no sólo el comportamiento no lineal del acero y el hormigón, sino también los efectos de la adherencia, encajamiento de áridos y pasador de las armaduras que cruzan una fisura. Se ha desarrollado un algoritmo que resuelve de manera automática los problemas derivados de la regeneración de la malla propios de la técnica de la fisuración discreta. Por último, algunos de los resultados obtenidos con el modelo son comparados con los obtenidos experimentalmente en vigas con roturas por cortante y flexión.

SUMMARY

This paper presents a discrete-crack finite element model for the nonlinear analysis of concrete structures under plane-stress conditions. The model incorporates five types of finite elements in order to take into account the different mechanisms of stress transmission in concrete structures: concrete and steel finite elements, and special finite elements for the modelling of bond, aggregate interlock and dowel-action. The modifications of the finite element mesh, typical of the discret-crack approach, are carried out using a fully automatic strategy. Finally, the model is applied to the analysis of beams failing in flexure and in shear and the analytical predictions compared with the experimental data.

INTRODUCCION

La aplicación del método de los elementos finitos al cálculo de estructuras, Y en concreto a las estructuras de hormigón, ha dado lugar a la aparición de numerosos modelos que, incidiendo en unos u otros aspectos, han sido desarrollados a lo largo de la última mitad de siglo por numerosos investigadores.

Recibido: Octubre 1988

Desde hace algunos años en el Grupo de Investigación de Hormigón del Departamento de Ingeniería de la Construcción de la Universidad Politécnica de Valencia se viene desarrollando una línea de investigación de análisis de estructuras de hormigón mediante la utilización del método de los elementos finitos. Como primer resultado de la línea de investigación se incluye el programa MEFFD¹ (Modelo de Elementos Finitos con Fisuración Discreta) que se presenta en este artículo.

El ámbito de aplicación del modelo es el de las estructuras planas cargadas en su plano (vigas, vigas de gran canto...) incluyendo en el análisis mecanismos de transmisión de esfuerzos que, siendo bien conocidos, son habitualmente despreciados. Estos son: la adherencia entre el hormigón y las armaduras, no considerada perfecta sino con la posibilidad de producirse desplazamientos relativos entre ambos materiales; y, sobre todo, los efectos pasador de las armaduras y de encajamiento de áridos. El modelo emplea además la técnica denominada de fisuración discreta para representar la fisuración en el hormigón.

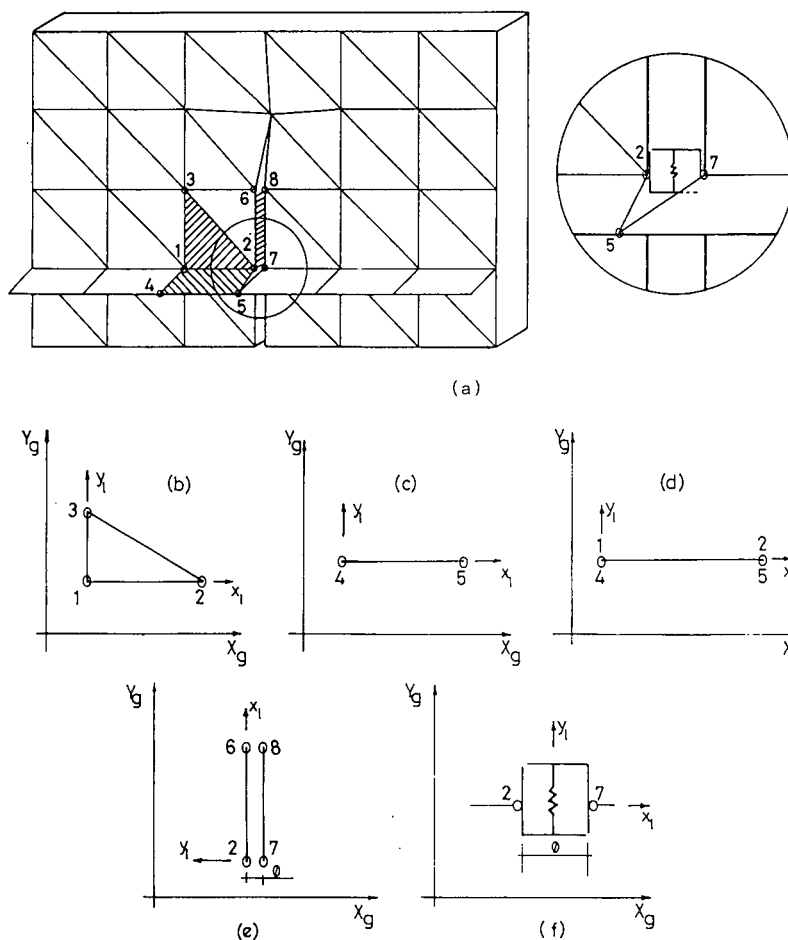
La técnica de la fisuración discreta consiste en representar la fisuración mediante la incorporación de discontinuidades en la malla de elementos finitos allí donde las fisuras aparecen. Estas discontinuidades se obtienen duplicando los nodos conforme la fisuración va progresando.

El resultado de la introducción de las fisuras de esta manera es que, conforme la fisuración va progresando, la malla que representa la estructura fisurada dista de parecerse a la original en mayor o menor medida, dependiendo de la complejidad de la red de fisuración, debido a la aparición de los nuevos nodos y elementos que van conformando dicha estructura fisurada. Este hecho plantea uno de los principales inconvenientes derivados del uso de la técnica de la fisuración discreta, puesto que es preciso redefinir la malla con la aparición de cada nuevo tramo de fisura, al mismo tiempo que se hace necesario llevar a cabo una puesta al día de las variables de estado de cada uno de los elementos ya existentes y de los que se van generando al producirse las fisuras. Históricamente se han adoptado diferentes soluciones para resolver este problema, desde la más simple de predefinir las fisuras, las cuales no se modifican durante todo el proceso de análisis², hasta soluciones con mayor o menor grado de automatismo en la regeneración de la malla^{3,4}.

En este trabajo se ha puesto especial énfasis en diseñar un proceso absolutamente automático en el proceso de decisión de la propagación o iniciación de las fisuras y en la posterior readaptación de la malla a las nuevas condiciones estructurales resultantes de la aparición de las fisuras.

DESCRIPCION DE LOS ELEMENTOS FINITOS Y ECUACIONES CONSTITUTIVAS

Para representar los diferentes mecanismos y efectos a través de los cuales se transmiten los esfuerzos en una estructura de hormigón fisurada (Figura 1) (hormigón, acero, adherencia, encajamiento y efecto pasador) se han utilizado cinco tipos de elementos finitos que brevemente se describen a continuación, junto con las ecuaciones constitutivas empleadas.



X_g, Y_g ejes de coordenadas globales

x_l, y_l ejes de coordenadas locales

Figura 1. Elementos finitos utilizados en el modelo.

- (a) Disposición general.
- (b) E.F. de hormigón.
- (c) E.F. de acero.
- (d) E.F. de adherencia.
- (e) E.F. de encajamiento.
- (f) E.F. de efecto pasador.

Hormigón

Para representar el hormigón se utiliza el elemento finito triangular de deformación constante, ampliamente conocido y utilizado, cuyas funciones de forma pueden encontrarse en cualquier texto general de elementos finitos⁵.

La ecuación constitutiva que define la relación entre las tensiones y las deformaciones es la propuesta por Kostovos^{6,7} para comportamiento triaxial. En MEFFD se impone la condición de tensión o deformación plana, según el caso. Esta formulación presenta la ventaja de que para su total definición, tanto en lo que se refiere

a la relación tensión-deformación propiamente dicha, como a la determinación de la rotura del material, únicamente es preciso conocer la resistencia en probeta cilíndrica del hormigón empleado.

Acero

Para representar la armadura se utiliza el elemento finito lineal de deformación constante, cuyo grado de interpolación es del mismo orden que el del elemento finito utilizado para representar al hormigón.

La ecuación constitutiva utilizada es, la también ampliamente difundida, ecuación bilineal. Cualquier relación tensión-deformación de otro tipo puede ser utilizada sin dificultad.

Adherencia

Para representar la adherencia entre la armadura y el hormigón que le rodea se utiliza un elemento finito de cuatro nodos, dos correspondientes al acero y dos al hormigón, cuya función de forma interpola linealmente el deslizamiento relativo entre los nodos del acero ($u1_s$ y $u2_s$) y los dos nodos del hormigón ($u1_c$ y $u2_c$) en la dirección del elemento (Figura 2.a):

$$S = (1 - x/L) \cdot (u1_c - u1_s) + x/L \cdot (u2_c - u2_s)$$

donde L es la longitud del elemento.

La ecuación constitutiva (Figura 2.b) relaciona dicho deslizamiento relativo con la tensión tangencial τ que se desarrolla entre el acero y el hormigón mediante la expresión:

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{\tau_{bu}} &= \frac{\mu \cdot K - \mu^2}{1 + (k - 2) \cdot \mu} & S < S_c \\ \tau &= \tau_{bu} & S_c \leq S < S_u \\ \tau &= 0 & S \geq S_u \end{aligned}$$

donde $\mu = S/S_c$ y $K = K_0 \cdot S_c/\tau_{bu}$.

Esta ecuación constitutiva queda definida con la pendiente inicial (K_0), el deslizamiento correspondiente a la máxima tensión tangencial (S_c), el deslizamiento último (S_u) y el diámetro de la armadura (ϕ). La máxima tensión tangencial (τ_{bu}) puede obtenerse en función del diámetro de la armadura a partir de las expresiones:

$$\begin{aligned} \tau_{bu} &= 115 & \phi < 8 \\ \tau_{bu} &= 130 - 1.9 \cdot \phi & 8 \leq \phi \leq 32 \\ \tau_{bu} &= 69 & 32 < \phi \end{aligned}$$

con ϕ en milímetros y τ_{bu} en Kg/cm^2 .

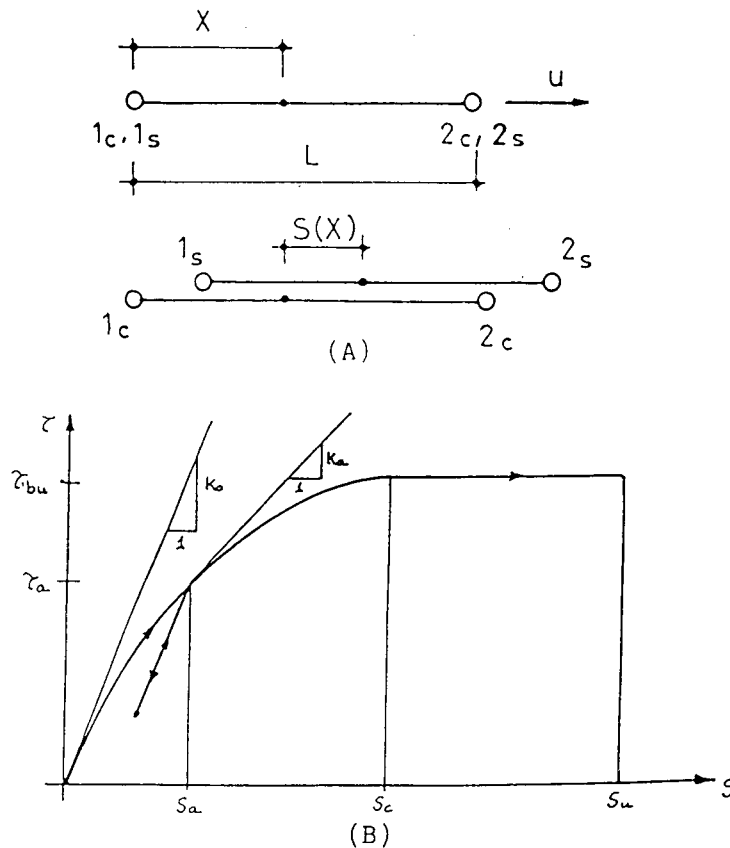


Figura 2. (a) Interpolación de los deslizamientos. (b) Ecuación constitutiva.

Encajamiento

El efecto del encajamiento de áridos entre caras de fisura se introduce mediante la consideración de un elemento finito lineal de cuatro nodos (dos a cada lado de la fisura) con interpolación lineal de los movimientos relativos entre caras de fisura (abertura y deslizamiento) de forma que conocidos los movimientos (u_i, v_i) y (u_k, v_k) de los dos nodos de un labio de fisura y los movimientos (u_j, v_j) y (u_l, v_l) de los dos nodos del otro lado de la fisura, la abertura w y el deslizamiento δ entre caras de fisura viene dado por (Figura 3.a):

$$w = (1 - x/L) \cdot (v_k - v_i) + x/L \cdot (v_l - v_j) = (1 - x/L) \cdot \Delta v_1 + x/L \cdot \Delta v_2$$

$$\delta = (1 - x/L) \cdot (u_k - u_i) + x/L \cdot (u_l - u_j) = (1 - x/L) \cdot \Delta u_1 + x/L \cdot \Delta u_2$$

La ecuación constitutiva empleada es la propuesta por Walraven⁸ (Figura 3.b) que relaciona las tensiones tangencial y normal entre caras de fisura con los movimientos relativos de las mismas y para cuya definición se utiliza únicamente la resistencia del hormigón.

Este elemento permite la inclusión de efectos derivados de los conceptos de mecánica de fractura, de acuerdo con el modelo de la fisura ficticia desarrollado por Hillerborg⁹.

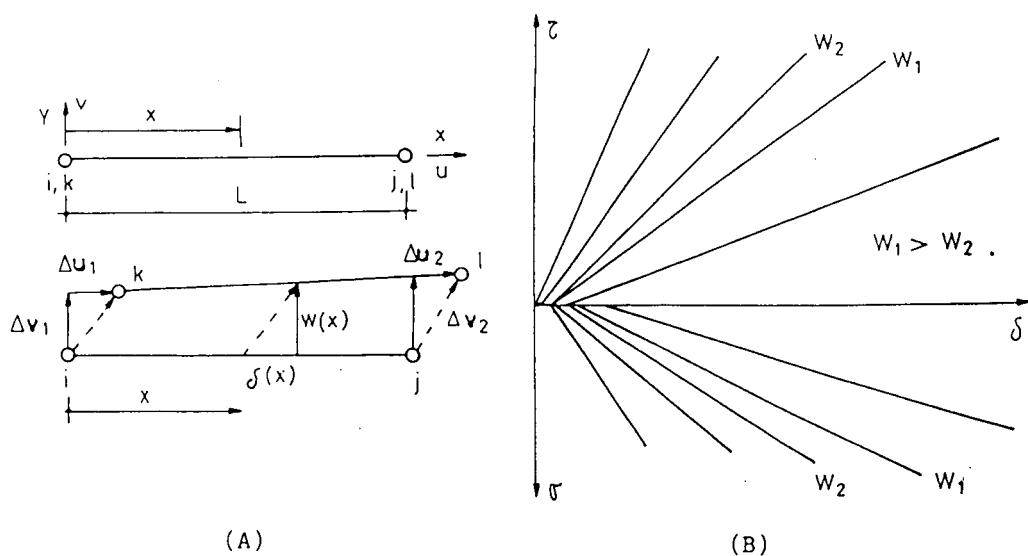


Figura 3. Elemento finito de encajamiento:

- (a) Interpolación de los movimientos entre caras de fisura.
 (b) Ecuación constitutiva.

Efecto pasador

El efecto pasador de las armaduras que atraviesan una fisura se tiene en cuenta mediante la inclusión de un elemento finito adimensional que une los nodos que quedan a uno y otro lado de la fisura comunes con el hormigón. A este elemento se le dota de rigidez en la dirección normal a las armaduras.

La diferencia de los movimientos entre dichos dos nodos en la dirección normal a la armadura permite conocer el deslizamiento relativo a partir del cual se puede obtener el esfuerzo de pasador desarrollado por las armaduras. La ecuación que relaciona el esfuerzo de pasador con el deslizamiento relativo entre caras de fisuras ha sido tomada del trabajo de Millard y Jonhson¹⁰.

CRITERIO DE FISURACION

El criterio establecido para la determinación del nodo fisurado, es decir, del nodo donde comienza una nueva fisura o a partir del cual se propaga una fisura ya existente, se basa en criterios tensionales.

El proceso general de elección del nodo fisurado (Figura 4) comienza con la obtención del equilibrio de la estructura para el nivel de carga dado, para lo que se emplea un método iterativo de Newton-Raphson. Una vez obtenida una situación de equilibrio, para el nivel de carga dado, se obtiene el estado tensional existente en todos los nodos de la estructura de acuerdo con los criterios de interpolación de Loov¹¹. Cuando las tensiones alcanzadas son tales que superan la envolvente de rotura adoptada⁷, se considera que dicho nodo es potencialmente fisurable, sin embargo, la decisión final acerca del nodo a fisurar no se establece antes de chequear todos los nodos, ya que es posible que tal condición se supere en más de un nodo para un

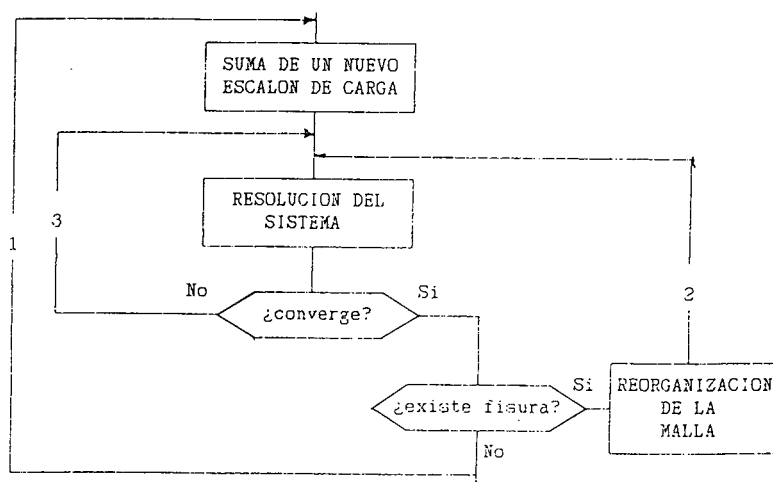


Figura 4. Esquema general del proceso.

determinado nivel de carga. En este caso se adopta como nodo fisurado aquel cuya tracción sea mayor de entre todos los que superan el criterio de rotura. Al mismo tiempo, la dirección normal a la dirección de la máxima tracción del nodo fisurado determina el ángulo de avance de la fisura que se generará a partir de ese nodo. Una vez definido el nodo fisurado y el ángulo de avance de la fisura, se pasa a redefinir la malla y a comprobar el equilibrio en la nueva situación resultante, sin aumentar el nivel de carga.

REORGANIZACION DE LA MALLA

Para lograr el objetivo planteado de obtener un proceso absolutamente automático durante la regeneración de la malla se opera con una sistemática que permite contemplar la gran variedad de casos posibles que pueden presentarse. Esta sistemática consta de una serie de pasos que se describen a continuación.

Partiendo del conocimiento del nodo fisurado y la dirección de avance de la fisura, el primer problema que se plantea es la elección del elemento a través del cual la fisura va a propagarse, ya que, en general, existen dos elementos atravesados por la recta que define la dirección del avance. El criterio seguido es el de escoger como elemento fisurado aquel que, atravesado por la dirección de la fisura, genera un nuevo tramo de fisura que forma con el tramo ya existente un ángulo mayor que $\pi/2$, esto es, se desecha el elemento a través del cual la fisura "avanzaría hacia atrás" (Figura 5). Si el nodo fisurado no es cabeza de fisura de ninguna fisura anterior (p.e. un nodo de borde o un nodo interior) resulta irrelevante la decisión acerca de la elección del elemento fisurado.

Una vez definido el elemento fisurado se considera que el nuevo tramo de fisura se propaga hasta encontrarse con el lado opuesto al nodo fisurado, dividiendo al elemento en dos. Sin embargo, esto plantea una nueva dificultad, ya que en muchas ocasiones el nuevo tramo de fisura se separa muy poco de algunos de los lados del triángulo y, al desdoblarse éste en dos, uno de ellos resulta excesivamente alargado, proporcionando

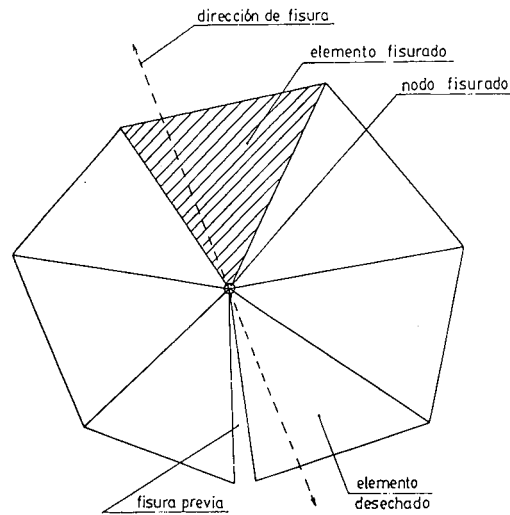


Figura 5. Elección del elemento fisurado.

una malla muy descompensada e introduciendo un factor de imprecisión en el posterior análisis. La solución más simple consiste en definir un ángulo máximo que medido a partir del lado del triángulo, permita definir si el nuevo tramo de fisura se separa más o menos que él a partir de dicho lado. Si el nuevo tramo de fisura forma con el lado del triángulo un ángulo mayor que el ángulo máximo se procede a definir el nuevo tramo a través del elemento (Figura 6a), en caso contrario se hace coincidir el nuevo tramo con el lado del triángulo (Figura 6c). Esta solución entra en conflicto con la idea de permitir la máxima flexibilidad en la dirección de avance de la fisura, por lo cual, caso de producirse la segunda de las posibilidades citadas anteriormente, se ha optado por incluir una tercera alternativa consistente en modificar la posición del lado del triángulo para hacerlo coincidir con el tramo de fisura (Figura 6b). Siempre que sea posible (cuando la fisura se aparte poco del lado del triángulo) el modelo escoge esta posibilidad, reservando la alternativa de desplazar el tramo de fisura para hacerlo coincidir con el lado para las ocasiones en que sea estrictamente preciso, las cuales se producen cuando el nodo se define como *no-desplazable*, tal es el caso de nodos de borde o de aquellos por donde pasa una armadura.

Durante los procesos descritos hasta este momento todavía no se ha llegado a efectuar ninguna modificación en la malla, tan solo se ha determinado el lugar en el que el nuevo tramo de fisura se va a incluir dentro de la malla de elementos finitos existente.

El paso siguiente, que se ha denominado *proceso de generación de nodo*, consiste en reconocer el entorno del elemento fisurado para identificar los elementos afectados por la aparición de la nueva fisura. En la Figura 7 se representan las posibilidades que pueden darse dependiendo del tipo de elementos afectados. En esencia, durante este proceso se generan los nodos y se duplican y generan los elementos necesarios para que la configuración final de la malla se componga del mismo tipo de elementos ya definidos (triángulos o elementos lineales). Como ejemplo en la Figura 8 se indican

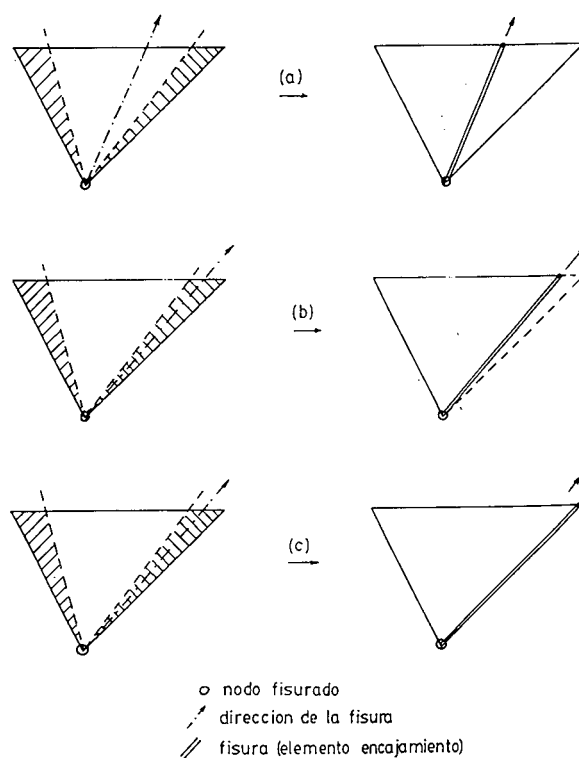


Figura 6. (a) Caso general con generación de un nodo.
 (b) Caso de nodo desplazable: se modifica la posición del nodo.
 (c) Caso de nodo no-desplazable: se modifica la dirección de la fisura.

los cambios que tienen lugar durante este proceso en uno de los casos citados en la Figura 7 (concretamente el caso (e) de esa figura). En dicha Figura 8 se muestra como se reasignan los nodos asociados a cada elemento (variable NODE), bien sean antiguos, bien generados, e igualmente como se modifican las variables que almacenan la información de los elementos que llegan a cada nodo (variable NENOD), información que consiste en indicar el número y tipo del elemento (1 hormigón, 2 acero, 3 adherencia, 4 encajamiento y 5 pasador).

La reorganización topológica de la malla finaliza con el *proceso de duplicación de nodo* consistente en la inclusión de un elemento encajamiento, junto con la posterior duplicación de uno, los dos, o ninguno de los nodos que delimitan el nuevo tramo de fisura (Figura 9), dependiendo de la situación del nodo:

Situación del nodo antes	¿Se duplica?	Situación del nodo después
Interior	No	Cabeza de fisura
Cabeza de fisura	Si	Labio de fisura
Labio de fisura	Si	Labio de fisura
Exterior	Si	Exterior y labio de fisura

además de la inclusión de un elemento pasador si ello fuera necesario.

La última operación del *proceso de duplicación de nodo* consiste en resignar a cada uno de los nodos, tanto antiguo, como duplicado, los elementos que antes llegaban al nodo antiguo.

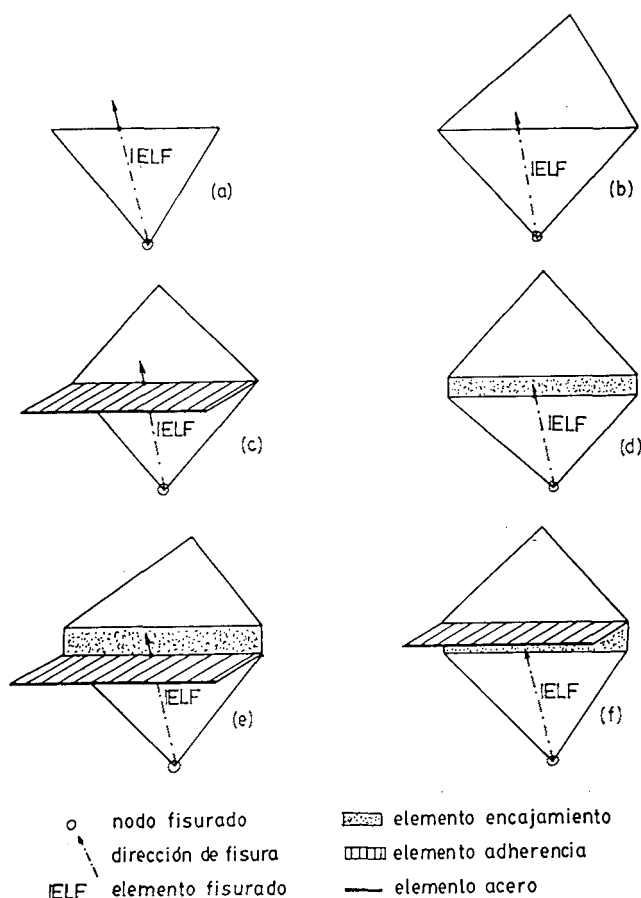


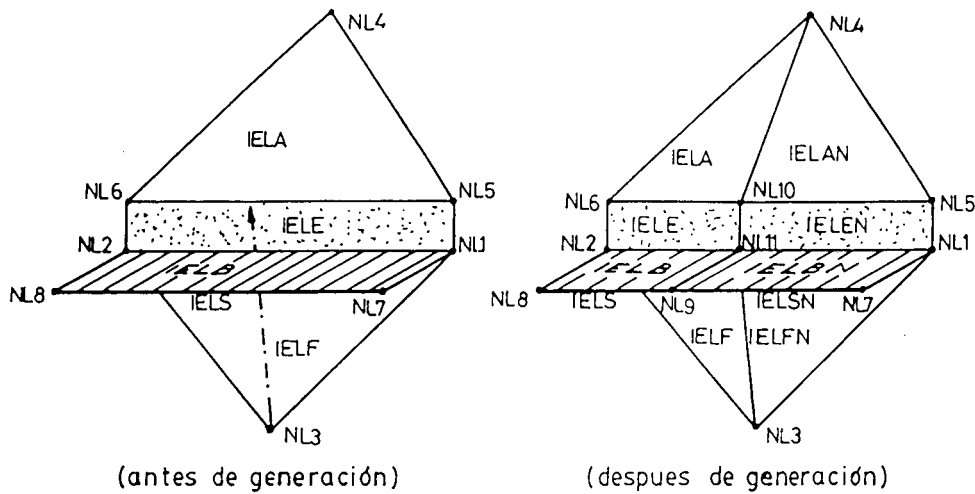
Figura 7. Proceso de generación de nodo. Localización de los elementos adyacentes al nodo fisurado.

- (a) No existe elemento adyacente. El nodo se genera en un borde exterior.
- (b) El elemento adyacente es otro de hormigón.
- (c) Existen dos elementos adyacentes: uno de adherencia y otro de hormigón.
- (d) El elemento adyacente es un encajamiento.
- (e) Existen dos elementos adyacentes: encajamiento y adherencia.
- (f) El elemento adyacente es un encajamiento. Adyacente a este existe un elemento de adherencia.

EJEMPLOS DE APLICACION

Como muestra de las capacidades del modelo se presentan los resultados obtenidos en el análisis de la rotura de una viga por flexión y de tres vigas con rotura por cortante.

Para el estudio de la rotura por flexión se ha escogido una de las vigas ensayadas por Batchelor y Kwun¹². En la Figura 10 se muestra la disposición y características de los materiales ensayados, así como las mallas utilizadas en la modelización del problema. El objeto de escoger tres mallas diferentes es el de comprobar la influencia que puede tener sobre los resultados el "direccionamiento de la malla". La carga de rotura obtenida en el ensayo fue de $P = 1.67$ toneladas, mientras que las predicciones del modelo han



	Elem.	NODE				NODE			
		NL1	NL2	NL3		NL11	NL2	NL3	
modificados	IELF	NL4	NL6	NL5		NL4	NL6	NL10	
	IELA	NL6	NL5	NL2	NL1	NL6	NL10	NL2	NL11
	IELE	NL2	NL1	NL8	NL7	NL2	NL11	NL8	NL9
	IELB	NL8	NL7			NL8	NL9		
	IELS								
generados	IELFN					NL11	NL3	NL1	
	IELAN					NL4	NL10	NL5	
	IELEN					NL10	NL5	NL11	NL1
	IELBN					NL11	NL1	NL9	NL7
	IELSN					NL9	NL7		
	Nodo	NENOD				NENOD			
		IELF	IELB	IELE		IELF	IELB	IELE	
	NL2	1	3	4		1	3	4	
	NL6	1	4			1	4		
	NL8	2	3			2	3		
modificados	NL1	1	3	4		1	3	4	
	NL3	1				1	1		
	NL4	1				1	1		
	NL5	1	4			1	4		
	NL7	2	3			2	3		
generados	NL9					2	2	3	3
	NL10					1	1	4	4
	NL11	1	1	3	3	1	1	3	3

Figura 8. Proceso de generación de un nodo. Modificación de variables nodales.

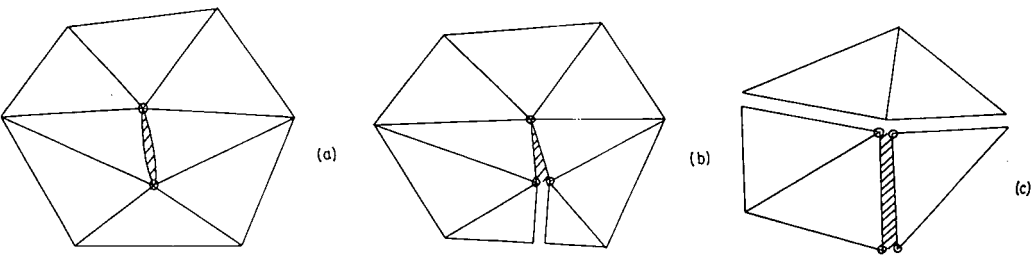
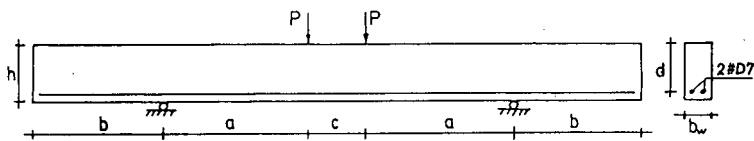


Figura 9. Distintos tipos de elementos de encajamiento.
(a) Elemento definido por dos nodos (fisura interior).
(b) Elemento definido por tres nodos (cabeza de fisura).
(c) Elemento definido por cuatro nodos (caso general).



CARACTERISTICAS MECANICAS (kg/cm²)

$f_c = 337$
 $f_y = 4720$

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS (cm)

	h	d	b_w	a	b	c	\emptyset
ensayo	28.91	25.1	15.24	76.2	71.16	30.48	0.76
mallas A, B	28.8	25.1	15.24	76.2	71.1	30.4	0.8
mallas D	28.8	25.1	15.24	76.2	15.3	30.4	0.8

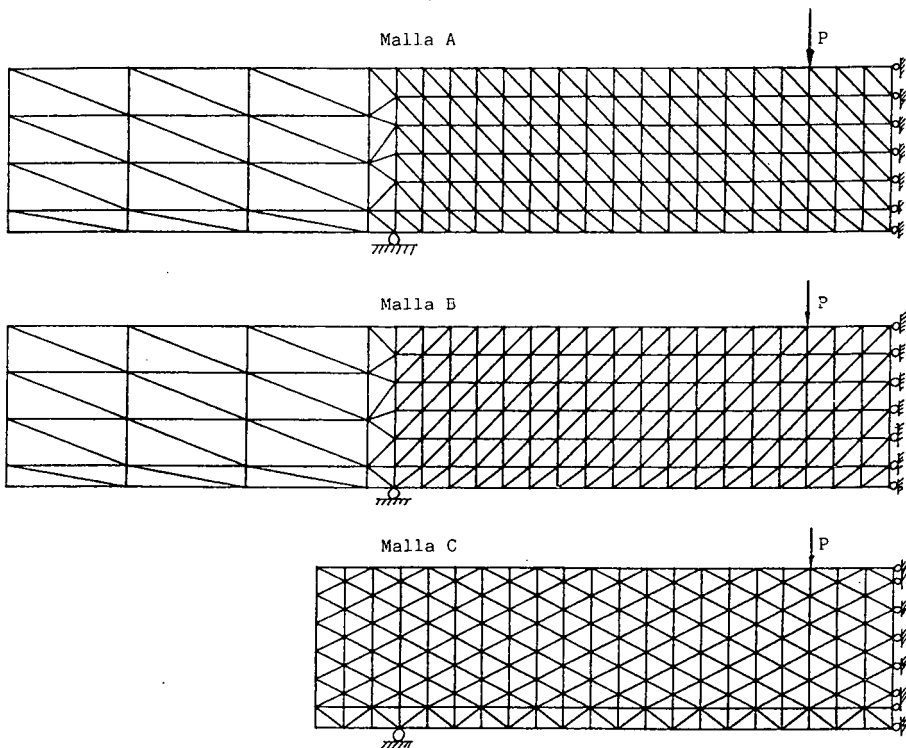


Figura 10. Rotura por flexión: Datos del ensayo¹² y modelización.

sido de 1.7 toneladas para las mallas A y D y de 1.8 toneladas para la malla B. En la Figura 11 se representa la red de fisuración obtenida con cada una de las mallas en el momento de producirse la rotura. La Figura 12 muestra las curvas carga-flecha obtenidas en cada caso.

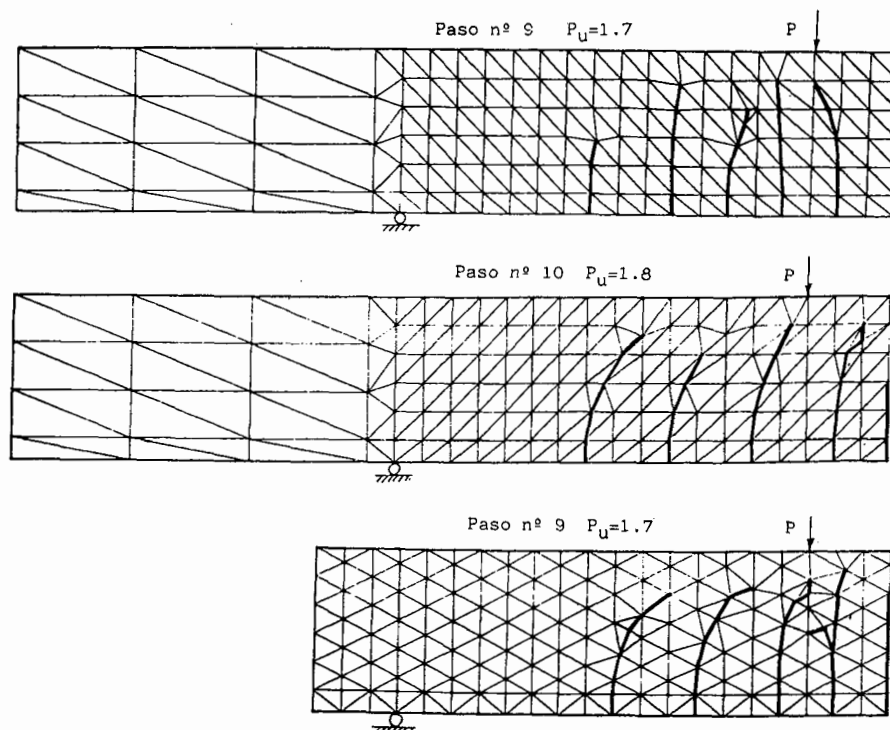
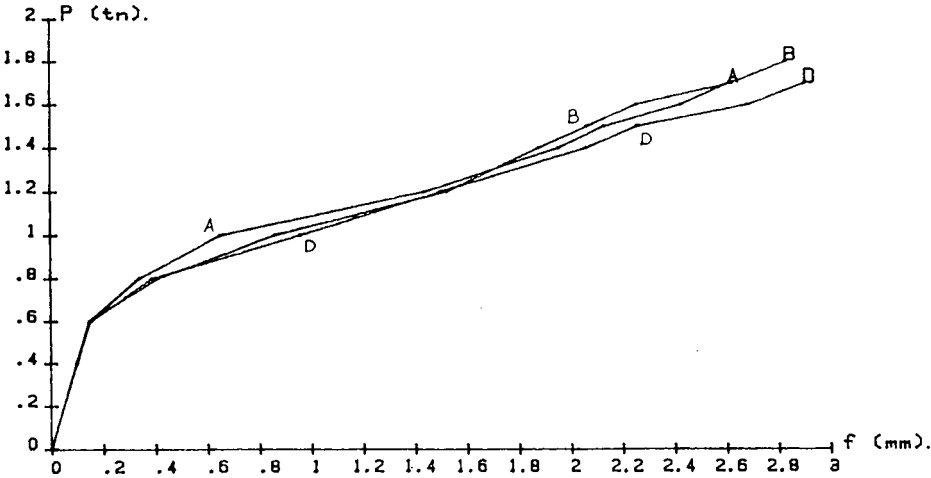


Figura 11. Rotura por flexión: Redes de fisuración obtenidas.

El estudio de la rotura por cortante se lleva a cabo mediante la comparación de los resultados del modelo con los aportados por Desayi¹³ para tres vigas con distinta relación vano de cortante-canto útil. La Figura 13 muestra la disposición del ensayo y modelización prevista. Las cargas de rotura (en toneladas) obtenidas en los ensayos y con el modelo se resumen en el siguiente cuadro junto con la relación vano cortante-canto de cada una de las tres vigas ensayadas:

	S1C3/4	S1C3/1	S1C2/2
a/d	1.2	0.9	0.6
ensayo	4.8	6.3	8.7
modelo	3.5	6.6	8.0

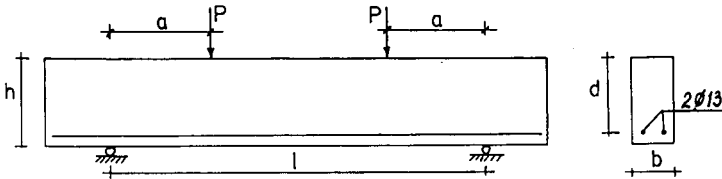
En la Figura 14 se muestran las redes de fisuración obtenidas en cada uno de estos tres casos analizados.



CURVA CARGA-FLECHA

VIGA 1S1

Figura 12. Rotura por flexión: Curvas carga-flecha.



CARACTERISTICAS MECANICAS (kg/cm²)

$f_c = 251$ $f_y = 2748$

CARACTERISTICAS GEOMETRICAS (cm)

h=20	b=10	d=17	l=92
	SIC3/4	SIC3/1	SIC2/2
a =	20.4	15.3	10.2
a/d =	1.2	0.9	0.6

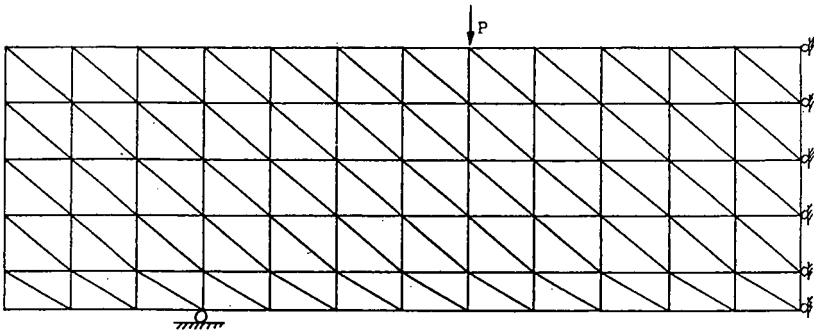


Figura 13. Rotura por cortante: Datos del ensayo¹³ y modelización.

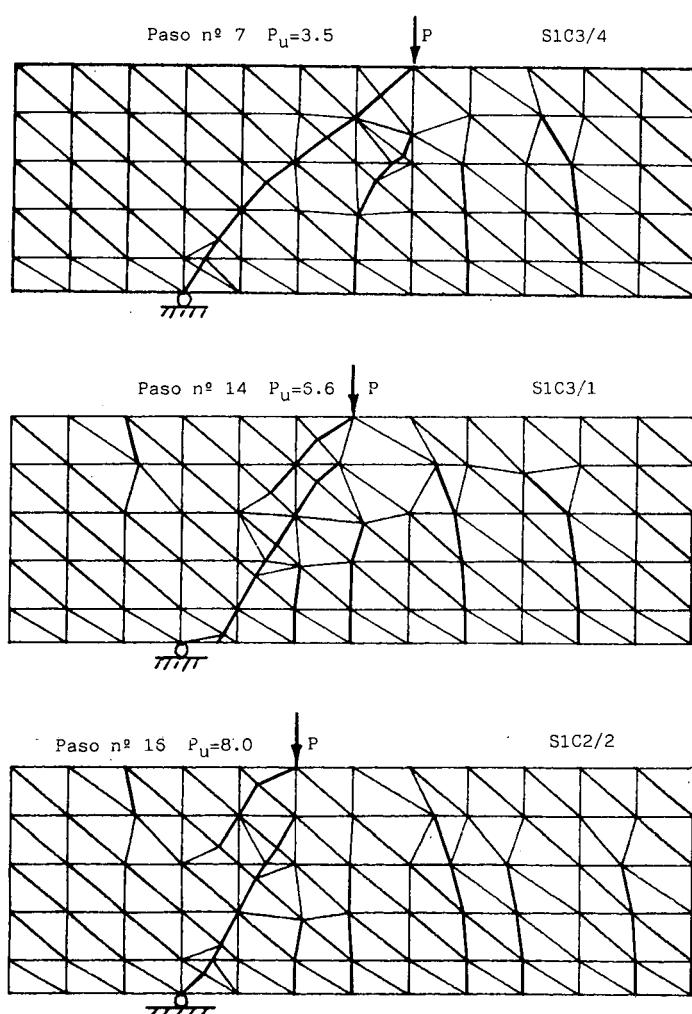


Figura 14. Rotura por cortante: Redes de fisuración obtenidas.

CONCLUSIONES

El modelo presentado en este trabajo pone de manifiesto las posibilidades de utilización de la técnica de la fisuración discreta en los modelos de elementos finitos aplicados a estructuras de hormigón armado.

Una de las mayores dificultades que supone la utilización de dicha técnica es la derivada de la aparición de nuevos nodos y elementos a medida que avanza el proceso de fisuración, con la consiguiente variación de la malla. El modelo propuesto incorpora un algoritmo que resuelve de forma completamente automática las posibles situaciones de regeneración de malla que pueden producirse. Esto supone, por un lado una gran comodidad desde el punto de vista del analista, y por otro lado un evidente factor de objetividad del análisis.

Los resultados obtenidos en los ejemplos indicados anteriormente muestran una óptima aproximación a los valores de rotura experimentales y, sobre todo, reproducen con exactitud el tipo de rotura obtenido en el laboratorio, no sólo en flexión, sino,

principalmente, cuando la rotura sobreviene por la aparición de una fisura diagonal debida al cortante.

La influencia del tipo de malla es mínimamente relevante tanto en lo que se refiere a las redes de fisuración obtenidas como a las curvas carga-flecha.

REFERENCIAS

1. M.A. Fernández Prada, "Un modelo por el método de los elementos finitos para el análisis no-lineal de estructuras de hormigón en tensión plana con representación real de la fisura", *Tesis Doctoral*, Publicación UPV/ic.88.2, Dpto. de Ing. de la Construcción (UPV), Valencia, (1988).
2. D. Ngo y A.C. Scordelis "Finite element analysis of reinforced concrete beams", *ACI Journal*, Vol. 64, No. 3, pp. 152-163, (1967).
3. D. Ngo, "A network topological approach to the finite element analysis of progressive crack growth in concrete members", *Tesis Doctoral*, Universidad de California, Berkeley, (1975).
4. V.E. Sauoma y A.R. Ingraffea, "Fracture mechanics of discrete cracking", *IABSE Colloquium*, Advanced Mechanics of reinforced Concrete, pp. 413-436, Delft, (1981).
5. O.C. Zienkiewicz, "El método de los elementos finitos", Ed. Reverté, Barcelona, España, (1979).
6. M.D. Kotsovos y J.B. Newman, "A mathematical description of the deformational behaviour of concrete under complex loading", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 31, No. 107, pp. 77-90, (1979).
7. M.D. Kotsovos, "A mathematical description of the strength properties of concrete under generalised stress", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 31, No. 108, pp. 151-158, (1979).
8. J.C. Walraven y H.W. Reinhardt, "Theory and experiments on the mechanical behaviour of cracks in plain and reinforced concrete subjected to shear loading", *Heron*, Vol. 26, No. 1A, (1981).
9. A. Hillerborg, "Numerical methods to simulate softening and fracture of concrete", *Fracture Mechanics of concrete*, pp. 141-170, Shih and DiTommaso Eds., Martinus Nijhoff Publishers, Dordrecht, Holanda, (1985).
10. S.G. Millard y R.P. Johnson, "Shear transfer across cracks in reinforced concrete due to aggregate interlock and to dowel action", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 36, No. 126, pp. 3-15, (1975).
11. R. Loov, "Modifications to the interpretation of the stresses and strains determined using constant strain triangular elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 22, No. 1, pp. 249-266, (1986).
12. B. de V. Batchelor y M. Kwun, "Shear in RC beams without web reinforcement", *Journal of the Structural Division*, Vol. 107, No. ST5, pp. 907-921, (1981).
13. P. Desayi, "A method for determining the shear strength of reinforced concrete beams with small a_v/d ratios", *Magazine of Concrete Research*, Vol. 26, No. 86, pp. 29-38, (1974).